TD2 - Raisonnement, théorie des ensembles et introduction aux graphes

Exercice 1 *Raisonnements corrects et incorrects*

1. Une mère dit à son fils : "s'il pleut, tu ne sors pas". Ce que dit la mère est vrai.
   (a) S'il ne pleut pas, peut-on en déduire que le fils sort ?
   (b) Le fils sort, peut-on en déduire qu'il ne pleut pas ?
   (c) Le fils ne sort pas, peut-on en déduire qu'il pleut ?
2. Toto veut montrer par récurrence que dans toutes les boîtes de crayons, tous les crayons sont de la même couleur. Il fait la preuve suivante
   - C'est vrai de manière évidente si $n = 1$
   - On va montrer que si la propriété est vraie dans une boite qui contient n crayons alors elle est encore vraie dans une boîte qui en contient $n + 1$. On prend donc une boîte qui contient $n + 1$ crayons. On retire le premier crayon de la boîte, par hypothèse de récurrence, les crayons restants sont tous de la même couleur. On retire maintenant le dernier crayon de la boîte, par hypothèse de récurrence, les crayons restants sont tous de la même couleur (la couleur des crayons du milieu). Tous les crayons de la boîte ont donc la même couleur.
   - Par récurrence on peut donc conclure que tous les crayons de la boîte ont la même couleur.

   Toto s'est évidemment trompé quelque part dans son raisonnement car le résultat est faux, pouvez-vous dire à quel endroit ?
3. Toto affirme maintenant la propriété suivante : "dans tout bar qui n'est pas vide, je peux trouver une personne telle que si cette personne boit alors tout le monde dans le bar boit"
   Toto a-t-il tort ou a-t-il raison ?

Exercice 2 *Raisonnement sur les ensembles*

1. Soient A, B et C trois ensembles quelconques. Comparer les ensembles $(A \cap B) \cup C$ et $A \cap (B \cup C)$.
2. Soient A, B deux ensembles quelconques, f une application de A dans B. Si $Y \subseteq B$ on note $f^{-1}(Y)$ l'image inverse de Y par f qui est l'ensemble des éléments de A dont l'image par f appartient à Y.
   (a) Donner une formule logique équivalente à la propriété $x \in f^{-1}(Y)$.
   (b) Soient Y_1 et Y_2 deux sous-ensembles de B. Montrer que si $Y_1 \subseteq Y_2$ alors $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$
   (c) Comparer dans le cas général $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ et $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 3 *Rappels sur les ensembles dénombrables.*
Un ensemble A est dénombrable s'il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.

1. Dire si les ensembles suivants sont dénombrables
   - $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   - $\wp(\mathbb{N})$
   - $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
   - L'ensemble des suites finies de $\{0; 1\}$
   - L'ensemble des suites infinies de $\{0; 1\}$
   - $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
2. Existe-t-il une partie X de $\mathbb{N}$ différente de $\mathbb{N}$, telle que X est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exercice 4 *Degrés des sommets d'un graphe*

Soit un graphe G fini non orienté avec n sommets et m arêtes.

1. Exprimer la somme des degrés des sommets en fonction du nombre d'arêtes.
2. Soit K le plus grand degré parmi les sommets du graphe, montrer que $K \leq 2m$ et donner un exemple pour lequel on a $K = 2m$.
3. On suppose maintenant que G est un graphe simple (sans boucle ni arête multiple).
   (a) Donner une borne sur le nombre d'arêtes en fonction du nombre de sommets et un exemple pour lequel cette borne est atteinte.
   (b) Montrer que $K \leq n - 1$ et donner un exemple pour lequel on a $K = n - 1$.

Exercice 5 *Hypercube*

On appelle hypercube de degré n et on note HC_n le graphe dont les sommets sont des mots binaires (composés de 0 et 1) de longueur n et dans lequel on a une arête du sommet a vers le sommet b si et seulement si les deux mots diffèrent d'une seule lettre.

1. Dessiner les graphes HC_0, HC_1, HC_2, HC_3.
2. Quel est le nombre de sommets, d'arêtes, le degré des sommets du graphe HC_n.